条件付き確率と確率の推測と理解

2013.7.28

粕谷英一　　ekasuscb@kyushu-u.org

個体群などの集団やリスクを扱う際には、条件付き確率に基づく思考が要求されることがある。確率が登場すると結果が直感とは大きく食い違うことは珍しくなく、とくに、複数の条件付き確率を含む場合には直感は大きな誤りを含むことも多い。

条件付き確率を含む場合には、ベイズの定理が使われることがよくある。Gigerenzer らは、同時確率に基づく方法のほうが（ベイズの定理と同じ内容の計算をしていながら）より直感的で誤りをおかしにくいと提案している。ここでは、Gigerenzer（2011）に基づいて、その方法を説明する。

１つの例として、以下の問題を考えてみよう：

問題.

あるタイプのがんとX線検査について以下のことがわかっている。X線検査ではこのタイプのガンについて、陽性あるいは陰性であると判定される。

・このがんを持つ人は人口のうち１%である

・がんを持つ人がこの検査で陽性と判定される確率は 0.9（つまり 90%）であり、陰性と判定される確率は0.1（つまり10%）である。

・ガンを持たない人がこの検査で陽性と判定される確率は0.09（つまり9%）であり、陰性と判定される確率は0.91（つまり91%）である。

では、このX線検査で陽性と判定された人が、がんを持つ確率はどれだけだろうか。

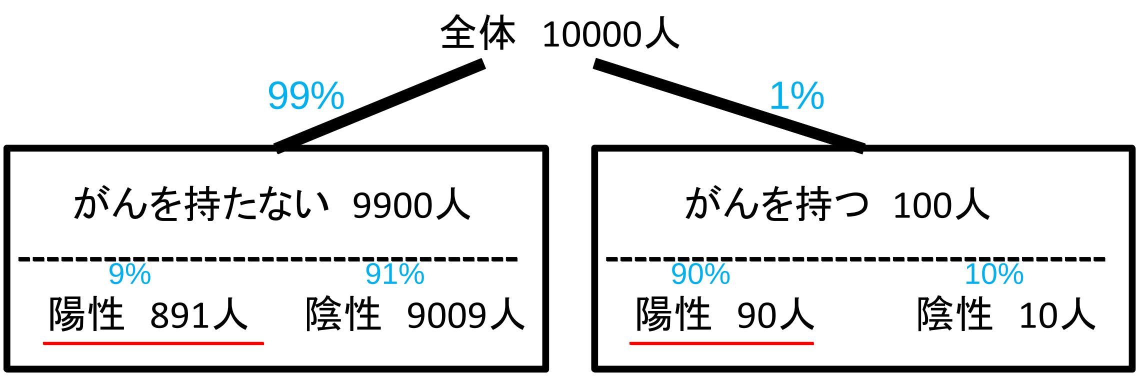
がんを持つ人がこの検査で陽性と判定される確率は0.9だから、その逆に、陽性と判定された人ががんを持つ確率も似た値であるようにも思える。また、がんを持たない人でもその 9%（確率で言えば 0.09）は陽性と判定されるので、陽性と判定された人ががんを持つ確率は0.9よりは下がるようにも思える。また、そのようなことを考えずに直ちに、問題の確率がすぐに計算されてイメージされる人もいるかもしれない。

さて、次ページ以下を見る前に、ここで、あなたはこの確率がどんな値だと思うか頭の中に思い浮かべてほしい。

人口全体を仮に 10000 人としてみよう。すると、がんを持つ人 100 人で、がんを持たない人 9900 人である。がんを持つ 100 人の 90%は陽性と判定され 10%は陰性と判定される。一方、がんを持たない 9900 人の 9%は陽性と判定され 91%は陰性と判定される。だから、10000 人は、

がんを持ち、検査で陽性の人　90 人
がんを持ち、検査で陰性の人　10 人
がんを持たず、検査で陽性の人　891 人
がんを持たず、検査で陰性の人　9009 人
から成ることがわかる。

ここから陽性の人は、90+891=981 人いることがわかる。そのうち、90 人ががんを持ち、891 人はがんを持たない。したがって、問題の、X 線検査で陽性であるときにがんを持っている確率は、90/981＝0.0917 である。つまり 9.17%であり、10%を少し下回る。この単純な計算は以下のようなダイアグラムで表すこともできる。



人口を 10000 人とした上記の計算結果は、人口を何人とするかにはよらずに同じ結果になることはすぐわかる。たとえば、人口を 200000 人とすると、

がんを持ち、検査で陽性の人　1800 人
がんを持ち、検査で陰性の人　200 人
がんを持たず、検査で陽性の人　17820 人
がんを持たず、検査で陰性の人　180180 人
であり、問題の確率は、やはり 1800/19620＝0.0917 である。

前ページで思い浮かべた数字が、0.0917 つまり 9.17%よりも大きかった人も小さかった人もいるだろう。Gigerenzer（2011）によれば、産婦人科医に対する研修の際に、この例とまったく同じ数値で同じ質問をしたところ、産婦人科医の六割が、80%から 90%と、9.17%に比べて非常に大きい値を答えている。

Gigerenzer らは、ここで述べた計算方法を、natural frequencies による方法と呼んでいる。

ベイズの定理との関係

条件付き確率が登場する、ここで見ているような問題は、確率論ではベイズの定理で扱われるのが普通である。ベイズの定理[1]は、以下のようである。

ある事象 B は、B_1 から B_k までのいずれかの結果をとるとする。B_i が起こった時に別の事象 A が起こる条件付き確率を $P\left(A \middle| B_i\right)$ と書くことにする（$1 \le i \le k$ である）。$P\left(A \middle| B_i\right)$ と $P\left(B_i\right)$ から、A が起こった時に B_i が起こる条件付き確率 $P\left(B_i \middle| A\right)$ は

$$P\left(B_i \middle| A\right) = \frac{P\left(B_i\right) \cdot P\left(A \middle| B_i\right)}{\sum_{j=1}^{k} P\left(B_j\right) \cdot P\left(A \middle| B_j\right)}$$

として求められる、というのがベイズの定理である。

先の問題にベイズの定理を適用して、「X 線検査で陽性と判定された人が、がんを持つ確率」を求めてみる。事象 A は検査が陽性であることであり、ある事象 B は、B_1 か B_2 であり、（$k=2$）である。B_1 はがんを持つことで、B_2 はがんを持たないことである。問題の内容から、$P\left(B_1\right)$ ががんを持つ確率で 0.01、$P\left(B_2\right)$ ががんを持たない確率で 0.99 である。また、$P\left(A \middle| B_1\right)$ はがんを持つときに陽性と判定される確率で 0.9 であり、$P\left(A \middle| B_2\right)$ はがんを持たないときに陽性と判定される確率で 0.09 である。これを上のベイズの定理の式に代入すると

$$0.0917\cdots = \frac{0.01 \times 0.9}{0.01 \times 0.9 + 0.99 \times 0.09}$$

と先と同じ結果になることがわかる。そして、上式の右辺をよく見ると、実は natural frequencies によるのと同じ計算をしていることがわかる。

---

[1] ベイズの定理は、確率の解釈として客観確率を採用しても主観確率を採用しても、また、頻度論的な統計でもベイズ統計でも、成り立つものである。

ベイズの定理はオッズの形式で表現されることもある。$k=2$の場合にはオッズの形式で表現すると、以下のようである

$$\frac{P(B_1|A)}{1-P(B_1|A)}=\frac{P(A|B_1)}{P(A|B_2)}\cdot\frac{P(B_1)}{1-P(B_1)}$$

この右辺に先の問題での数値を入れると、

$$\frac{P(B_1|A)}{1-P(B_1|A)}=\frac{0.9}{0.09}\cdot\frac{0.01}{0.99}$$

となり、これを解くと、やはり同じように$P(B_1|A)=0.0917\cdots$となる。このオッズの形式は、X 線検査という情報がないときには、がんを持つか持たないかは 1:99 であったのが、X 線検査で陽性であるという情報があるとオッズが 10 倍（=0.9/0.09）を掛けただけ変化して、$0.0917\cdots$対$(1-0.0917\cdots)$になったと見ることも可能である。

先に示した natural frequencies による計算では、総人口を適当な数に仮定し、がんを持ち検査で陽性の人の数、がんを持ち検査で陰性の人の数がんを持たず検査で陽性の人の数、がんを持たず検査で陰性の人の数の４つを求めた。この４つの数は、２つの種類の事象（問題の例ではがんを持つか持たないかと検査で陽性か陰性か）の同時確率に対応している。そして、求めた同時確率を使って条件付き確率を計算している。natural frequencies のように同時確率を使ってもベイズの定理でも同じ答が得られ、計算内容も実は同じである。

同時確率を求める、natural frequencies による方法の方が、ベイズの定理の式をおぼえている必要もなく、計算の導き方が直感により近いため、誤りをおかしにくい場面も多いと考えられる。Gigerenzer らは、natural frequencies による方法が、人間が心理学的に元来苦手とすることが多い、条件付き確率が含まれるような確率の推測における有効な手段であると論じている。

生物の個体群のような個体の集まりでの２つの性質の関係やリスクの大きさでは、条件付き確率が複数登場することはむしろ普通である。そのような場合に、条件付き確率から事象が逆になった別の条件付き確率を求める際には、natural frequencies による方法は有効な場面が多いだろう。

たとえば、個体の状態と検査などの結果を示すのに ROC（Receiver Operating Characteristic、受信者操作特性）が広く使われている。ROC では、sensitivity と specificity が基本的で重要な量である。この 2 つの量は条件付き確率であり、先のがんと X 線検査の例で言えば、sensitivity（がんを持つ人を陽性と正しく判定する率）は 0.9、specificity（特

異度、がんを持たない人を陰性と正しく判定する率）は 0.91 である。ROC においても、検査結果が得られたとき、個体の状態がどのような確率でどんなものであるかを示したいことは多い。そのようなときにも、同時確率をまず求める、natural frequencies による方法は役に立つだろう。

引用文献

Gigerenzer ,G. (2011). BMJ(British Medical Journal), 343: d6386.